Prueba N° 3

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Total	Nota

<u>**Instrucciones**</u>:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 100 minutos.
- **Use técnicas vistas en el curso. No se tomarán en cuenta cálculos sin justificación o que involucren técnicas ajenas a las vistas en el curso**.

1) **[10 pts.]** Si la función $y = f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación

$$\ln(1+y^2) + xy = 2y\arctan(y),$$

determine y'.

2) **[15 pts.]** El radio r de un círculo está creciendo a razón constante de $5\frac{mts}{seg}$. Por otra parte, el lado l de un cuadrado está creciendo a razón constante de $7\frac{mts}{seg}$. Determine cuál de las dos áreas crece más rápido respecto al tiempo, cuando $r = 2$ y $l = 4$.

3) **[20 pts.]** Considere la función $f(x) = \dfrac{1+2x^2}{1-x^2}$.

   a) **[4 pts.]** Encuentre asíntotas verticales y horizontales de f.
   b) **[4 pts.]** Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   c) **[4 pts.]** Encuentre los máximos y mínimos locales de f y sus valores. *Ayuda:* $f''(x) = \dfrac{6(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$.
   d) **[4 pts.]** Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de f.
   e) **[4 pts.]** Bosqueje la gráfica de f, identificando claramente los elementos encontrados en los ítems anteriores.

4) **[15 pts.]** En una agencia de envíos por encomienda, las condiciones que se deben cumplir para usar el servicio son las siguientes:

   - El producto a enviar debe ir dentro de una caja rectangular cuya base sea cuadrada.
   - Las dimensiones de la caja (alto,largo,ancho) deben sumar 90 cms.

   En base a lo anterior, calcule el máximo volumen que puede tener la caja en la cual va el producto a enviar.

PAUTA

1) Derivando respecto a x en la igualdad entregada se tiene que

$$\frac{1}{1+y^2}2yy' + y + xy' = 2y'\arctan(y) + \frac{1}{1+y^2}2yy'.$$

Reduciendo términos semejantes y despejando y' se tiene que

$$y' = \frac{y}{2\arctan(y) - x}.$$

2) Sean

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{Área círculo de radio } r \\ A_2 &: \text{Área cuadrado de lado } l \\ t &: \text{tiempo.} \end{aligned}$$

Por el enunciado, los datos entregados son

$$\frac{dr}{dt} = 5$$

$$\frac{dl}{dt} = 7$$

Además, se tiene que

$$A_1(r) = \pi r^2 \Longrightarrow \frac{dA_1}{dr} = 2\pi r$$

$$A_2(l) = l^2 \Longrightarrow \frac{dA_2}{dl} = 2l,$$

por lo que

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{dA_1}{dr}\frac{dr}{dt} \Longrightarrow \frac{dA_1}{dt} = 10\pi r$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \frac{dA_2}{dl}\frac{dl}{dt} \Longrightarrow \frac{dA_2}{dt} = 14l,$$

y considerando $r = 2$ y $l = 4$ se tiene que

$$\left.\frac{dA_1}{dt}\right|_{r=2} = 20\pi \approx 62,83$$

$$\left.\frac{dA_2}{dt}\right|_{l=4} = 56,$$

por lo que el área del círculo crece más rápido.

3) a)
- Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$.
- Asíntotas horizontales: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -2$.

b) Derivando tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x(1-x^2) - (1+2x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{6x}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

de donde se obtienen los puntos críticos $x = 0, x = \pm 1$.
Así, la tabla de signos para f' es

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$6x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(1-x^2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$-$	$+$	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

de donde se tiene que f es decreciente en $]-\infty, 0] - \{-1\}$ y creciente en $[0, +\infty[-\{1\}$.

c) De lo anterior se tiene que en $x = 0$ f alcanza un mínimo local, cuyo valor es $f(0) = 1$ y cuyo punto correspondiente en el gráfico es $(0, 1)$.

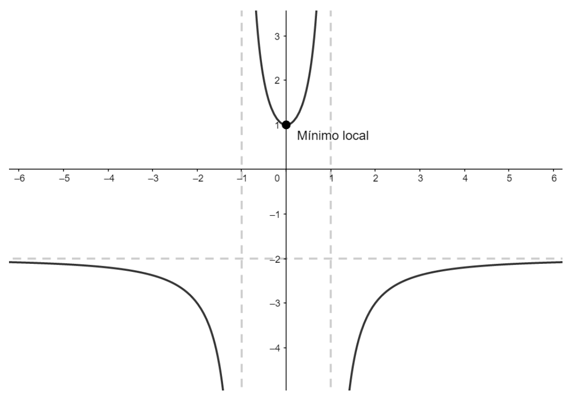
d) De f'' tenemos que los eventuales puntos de inflexión tendrían abscisa $x = \pm 1$, lo cual no puede ocurrir pues las rectas $x = \pm 1$ son asíntotas. Haciendo tabla de signos para f'':

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

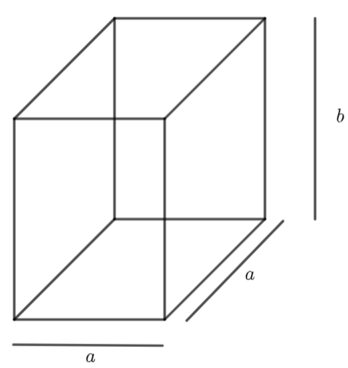
$6(x^2+3)$	$+$	$+$	$+$
$(1-x^2)^3$	$-$	$+$	$-$
f''	$-$	$+$	$-$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$

de donde se tiene que f cóncava hacia arriba en $]-1,1[$ y cóncava hacia abajo en $\mathbb{R}-]-1,1[$.

e) El gráfico de f es el siguiente:



4) Sea a el lado de la base cuadrada y b el alto de la caja:



El volumen de la caja está inicialmente dado por

$$V = a^2 b.$$

Sin embargo, de la segunda condición del enunciado se tiene que $2a + b = 90$, de donde $b = 90 - 2a$, luego reescribiendo el volumen se obtiene que

$$V(a) = a^2(90 - 2a) = 90a^2 - 2a^3.$$

Derivando la función volumen respecto a a se tiene que

$$V'(a) = 6a(30 - a),$$

cuyos puntos críticos válidos según contexto se reducen a $a = 30$. Así, haciendo tabla de signos para V' se tiene que

$0 \quad 30 \quad +\infty$

V'	$+$	$-$

de donde se concluye que V alcanza un valor máximo en $a = 30$, por lo que el volumen máximo es

$$V(30) = 27000 cm^3.$$